① Дайте определение трансцендентной функции e^z и укажите её основные свойства

$$e^z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\ ;\ |z|<\infty$$

Свойства:

1. Если φ - вещественное число, то $\cos\varphi = (e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2$ и
$\sin\varphi = (e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})/2i$

2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

3. e^z - периодическая функция с периодом $2\pi i$.

4. Если $z = x+iy$, то $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$; $\operatorname{Re} e^z = e^x\cos y$ и $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$

② Дайте определение трансцендентных функций $\cos z$, $\sin z$ и укажите их основные свойства

$$\cos z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\ ;\ \sin z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ;\ |z|<\infty$$

Свойства:

1. $\cos z = (e^{iz}+e^{-iz})/2$; $\sin z = (e^{iz}-e^{-iz})/2i$ - формулы Эйлера

2. $\cos z$ и $\sin z$ - периодические функции с периодом 2π.

3. Для $\cos z$ и $\sin z$ остаются корректными все формулы тригонометрии

4. В $\mathbb{C}$ функции $\cos z$ и $\sin z$ не являются ограниченными.

③ Дайте определение трансцендентных $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ и укажите их основные свойства

$$\operatorname{ch} z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\ ,\ \operatorname{sh} z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\ ;\ |z|<\infty$$

Свойства:

1. $\operatorname{ch} z = \{e^z+e^{-z}\}/2$, $\operatorname{sh} z = (e^z-e^{-z})/2$ - формулы Эйлера

2. $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ - периодические функции с периодом $2\pi i$.

3. $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ обладают стандартными свойствами гиперболических функций.

4. $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$, $\operatorname{sh}(iz) = i\sin z$

5. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x\cos y + i\operatorname{sh} x\sin y$; $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y$

(4) Дайте определения трансцендентных функций $\ln z$, $\operatorname{Ln} z$ и укажите их основные свойства

Пусть $W = \ln z$ определяется как функция, обратная по отношению к показательной функции $z = \exp(W)$.
Если $W = u + iV$ и $z = |z| \exp(i \arg z) \neq 0$, то $z = \exp(W) \Leftrightarrow$
$|z| \exp(i \arg z) = \exp(u + iV) = \exp(u) \cdot \exp(iV) \Leftrightarrow (|z| = \exp(u)) \wedge (\arg z = V)$
Таким образом $\ln z = u + iV = \ln|z| + i \arg z$ при $z \neq 0$.

$\operatorname{Ln} z \overset{\Delta}{=} \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln z + i2\pi k.$

Свойства:

1. $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
2. $\ln(z_1 / z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$

(5) Дайте определение дифференцируемой функции комплексного переменного и сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости.

Функцию $f(x) = u(x,y) + iV(x,y)$ называют дифференцируемой в точке $z = x + iy$ области $G \subset \mathbb{C}$ ее определения, если для любого $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ такого, что $(z + \Delta z) \in G$ существует $A = \alpha + i\beta$ такое, что $\Delta f \overset{\Delta}{=} f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$, где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\frac{o(|z|)}{\Delta z}\right| = 0$. При этом величину $A = \alpha + i\beta$ называют производной f в точке z и обозначают $f'(z)$.

Теорема:

Если $f(z)$ - дифференцируема в точке $z \in G$, то в этой точке выполнены условия Коши-Римана:
$\{u'_x(x,y) = V'_y(x,y)\} \wedge \{u'_y(x,y) = -V'_x(x,y)\}$, где $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$; $V(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Теорема:

Если $f(z)$ определена в G, а в точке $z \in G$ для нее выполнены условия Коши-Римана и существует полные дифференциалы её вещественной и мнимой частей, т.е. $\Delta u(x,y) = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o_u(|\Delta z|)$,
$\Delta V(x,y) = V'_x \Delta x + V'_y \Delta y + o_V(|\Delta z|)$,
где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{o_u(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0 = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{o_V(|\Delta z|)}{\Delta z}$, тогда $\exists f'(z)$.

⑥ Дайте определение аналитической функции (в точке и в области). Запишите интегральную формулу Коши.

Если функция $w=f(z)$ дифференцируема не только в точке z области G ее определения, но в некоторой ее окрестности, то эту функцию называют аналитической в этой точке. Если функция является аналитической в каждой точке области $G_1 \subset G$, то ее называют аналитической в этой области.

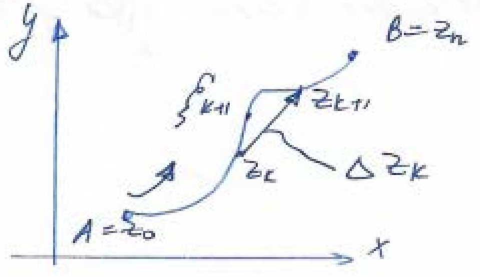
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_G}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma_G}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

⑦ Что понимают под интегралом от функции комплексного переменного и какими свойствами он обладает?

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ - гладкая или кусочно-гладкая ориентированная дуга, соединяющая две фиксированные точки A и B комплексной плоскости и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, определена и непрерывна во всех точках L. Дугу L точками $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ разбиваем на n элементарных дуг $\{\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}\}_{k=0}^{n-1}$ произвольным образом, где $z_0 = A$ и $z_n = B$. На каждой элементарной дуге $\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$ произвольным образом выбираем отмеченную точку $\xi_{k+1} \in \overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$ и составляем интегральную сумму $S_n(f) \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1}) \cdot \Delta z_{k+1}$, где $\Delta z_{k+1} \triangleq z_{k+1} - z_k$ - вектор с началом в точке z_k и концом в точке z_{k+1}, а $|\Delta z_{k+1}|$ - длина хорды, соединяющей точки z_k и z_{k+1}. [Если вне зависимости от выбора точек $\{z_k\}$ и $\{\xi_k\} \in L$ существует $\lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} S_n(f)$, то его называют интегралом от функции $f(x)$ по ориентированной дуге $L \subset \mathbb{C}$ и обозначают

$\int_L f(z)dx$]



Свойства:

1. $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \{u(x,y)+iv(x,y)\}\cdot\{dx+idy\} =$

$= \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L udx - udy$

(рассматриваемый интеграл обладает стандартными свойствами криволинейных интегралов)

2. $\int\limits_L \sum\limits_{m=1}^{N} \lambda_m f_m(z)dz = \sum\limits_{m=1}^{N} \lambda_m \int\limits_L f_m(z)dz$

3. Если дуги L и L^* отличаются лишь направлением обхода, то $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L^*} f(z)dz$.

4. Если $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ и дуги L_k, L_{k+1} имеют лишь одну общую точку $\forall\ k = \overline{1:m-1}$, то

$\int\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{L_k} f(z)dz$

5. Если дуга L задана параметрически:
$L = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : x = x(t) \wedge y = y(t),\ t \in [t_A; t_B],\ A = x(t_A)+iy(t_A) \wedge B = x(t_B)+iy(t_B)\}$, то $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(z(t))\cdot z'(t)dt$.

6. $\int\limits_L dz = B - A$, т.к. $\int\limits_L dz = \lim\limits_{\max|\Delta t|\to 0} \sum \Delta z_k = \lim\limits_{\max|\Delta t|\to 0} \{(z_1-z_0)+(z_2-z_1)+\ldots$
$\ldots+(z_n-z_{n-1})\} = z_n - z_0 = B - A$.

7. Если $(\forall z\in L)(|f(z)|<N)$ и длина дуги L равна $m(L)$, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le N\cdot m(L)$, т.к.

$\left|\sum f(\xi_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum |f(\xi_k)|\cdot|\Delta z_k| \le N\sum|\Delta z_k| \to N\cdot m(L)$

при $|\Delta z_k| \to +0$

8. Если L – ориентированный замкнутый контур, то интеграл функции $f(z)$ по ориентированному замкнутому контуру L вводят стандартным способом и обозначают $\oint\limits_L f(z)dz$

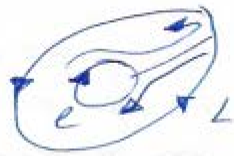
(8) Сформулируйте теорему Коши для одно- и много-связных областей.

Теорема:

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G \cup \Gamma_G \subset \mathbb{C}$ и Γ_G - кусочно-гладкий замкнутый контур, то $\oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = 0$.

Теорема:

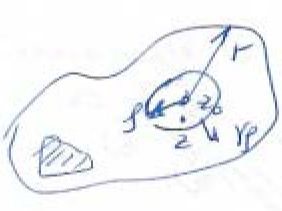
Если в условиях теоремы Коши $G \subset \mathbb{C}$ - n-связная область, ограниченная внешним L и внутренними $\{\ell_k\}_{k=1}^{n-1}$ кусочно-гладкими замкнутыми контурами, то $\oint\limits_L f(z)dz = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \oint f(z)dz$



(9) Сформулируйте теорему Тейлора для аналитической функции

Теорема:

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $G \subset \mathbb{C}$. Если z_0 - внутренняя точка G и $r = \min\limits_{z \in \Gamma_G} |z - z_0|$, то в круге $K_\rho = \{z : |z - z_0| \leq \rho < r\} \subset \mathbb{C}$. функция $f(z)$ „разлагается в ряд" по целым положительным степеням $(z - z_0)$



(10) Что называют нулем аналитической функции порядка m? Как определить порядок нуля аналитической функции по её разложению в ряд Тейлора?

1. Точку z_0 называют нулем порядка m аналитической функции $f(z)$, если существует аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(z_0) \neq 0$ и $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$.

2. Точку z_0 называют нулем порядка m аналитической функции $f(z)$, если $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(m)}(z_0)$

Порядок нуля равен порядку производной.

(11) Какую изолированную особую точку называют устранимой? Сформулируйте необходимое и достаточное условие для устранимой особой точки.

Изолированная особая точка называется устранимой если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0 \neq \infty$ и $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$

Теорема:

Пусть $f(z)$ является аналитической в кольце $K = \{z: 0 < |z-z_0| < \rho\}$. Точка $z_0 \neq \infty$ - устранимая для $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует окрестность точки z_0, в которой $|f(z)| < M < \infty$.

(12) Какую изолированную особую точку называют полюсом порядка m? Сформулируйте необходимые и достаточные условия для полюса порядка m.

Пусть в окрестности точки $z_0 \neq \infty$, являющейся изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, функция $f(z)$ не ограничена, но $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. В этом случае точку z_0 называют полюсом.

Между полюсами $f(z)$ и нулями $F(z) \triangleq 1/f(z)$ существует соответствие и $z_0 \neq \infty$ называют полюсом порядка m для $f(z)$, если z_0 — нуль порядка m для $F(z) = 1/f(z)$.

Теорема:

Изолированная особая точка $z_0 \neq \infty$ однозначной аналитической функции $f(z)$ является для нее полюсом порядка m тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$

Теорема:

Изолированная особая точка $z_0 \neq \infty$ аналитической функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда

$f(z) = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ и $c_{-m} \neq 0$.

(13) Какую изолированную особую точку называют существенно особой? Сформулируйте необходимое и достаточное условие для существенно особой точки.

Если в окрестности изолированной особой точки $z_0 \neq \infty$ однозначной аналитической функции $f(z)$ она не ограничена и $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то такую точку называют существенно особой

Теорема:

(14) Опишите классификацию конечных изолированных особых точек аналитических функций по виду ряда Лорана.

1) правильная или устранимая, если:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; \quad \exists \lim_{z \to 0} f(z) \neq \infty$$

2) полюс порядка m, если:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k z^k, \quad c_{-m} \notin \{0, \infty\}$$

$$\exists \lim_{z \to 0} z^m f(z) = b: \ 0 < |b| < \infty.$$

3) существенно особая точка, если:

$f(z) = \sum\limits_{k=-\infty} c_k z^k$ и существует счетное мн-во ненулевых коэффициентов с отрицательными индексами. $\nexists \lim\limits_{z \to 0} f(z)$

(15) Опишите классификацию бесконечно удалённых особых точек аналитических функций по виду ряда Лорана.

1) правильная или устранимая, если

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{0} C_k z^k \;;\; \exists \lim_{z\to\infty} f(z) \neq \infty$$

2) полюсом порядка m, если:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{n} C_k z^k,\; C_m \in (0,\infty),\; \exists \lim_{z\to\infty} z^{-m} f(z) = b \;;\; 0<|b|<\infty.$$

3) существенно особая точка, если:

$f(z)=\sum_{k=-\infty} C_k z^k$ и существует счётное множество ненулевых коэффициентов с положительными степенями. $\nexists \lim_{z\to\infty} f(z)$.

(16) Что называют вычетом аналитической функции в конечной изолированной особой точке? Как можно найти вычет аналитической функции для различных типов изолированных особых точек?

1) Из т. Коши следует, что $\mathrm{Res}\, f(z_0)$ не зависит от формы и размеров контура L, если он удовлетворяет условиям, сформулированным в определении вычета.

2) Если z_0 - изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$, то $\mathrm{Res}\, f(z_0) \equiv C_{-1}$, где C_{-1} - коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 \neq \infty$

3) Если $z_0 \neq \infty$ - правильная точка или точка аналитичности однозначной аналитической функции $f(z)$, то $\mathrm{Res}\, f(z_0) = 0$.

Если $z_0 \neq \infty$ - точка аналитичности или изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$ и L - замкнутый контур, охватывающий точку z_0 так, что на самом контуре L и всюду внутри него, за исключением быть может самой точки z_0, функция $f(z)$ является аналитической, то вычетом $f(z)$ относительно точки z_0 называется число $\mathrm{Res}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\,dz$.

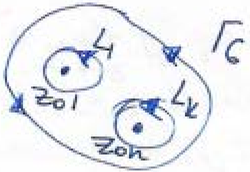
(17)

$2\pi i \quad \oint f(z)dz.$

(17) Сформулируйте основную теорему о вычетах.

Теорема:

Если $f(z)$ – однозначная аналитическая функция в замкнутой области $G \cup \Gamma_G$, за исключением конечного числа изолированных точек $\{z_{0k}\}_{k=1}^{n}$, охваченных кусочно-гладким замкнутым контуром Γ_G, то $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_{0k})$



(18) Дайте определение вычета аналитической функции в бесконечно удаленной точке. Как можно вычислить такой вычет?

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной точки $z_0 = \infty$ называется комплексное число $\operatorname{Res} f(\infty) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=N} f(z)\,dz$, где $N > 0$

столь велико, что в кольце $B_N = \{ z \in \mathbb{C} : N < |z| < \infty \}$ функция $f(z)$ является аналитической. При этом обход контура интегрирования - стандартный, то есть область B_N остается слева.

1) $\operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1}$, где C_{-1} - коэффициент в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$. Знак „-" - следствие направления обхода контура (по часовой стрелке).

2) Если однозначная аналитическая функция $f(z)$ в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ имеет лишь изолированные особые точки, то сумма вычетов в них равна нулю

(19) Сформулируйте теорему о сумме вычетов в $\mathbb{C}$.

Теорема:

Если однозначная аналитическая функция $f(z)$ в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ имеет лишь изолированные особые точки, то сумма вычетов в них равна нулю.